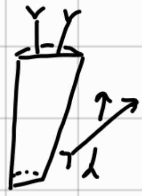
La conjetura "optimista" de Lekili & Polishchuk

§ Representaciones de carcajes

Carcaj = gráfica dirigida:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] & 2 \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[r, "c"] & 3 \arrow[loop right, "d"] \\ & 4 \arrow[u, shift left, "f"'] \arrow[u, shift right, "e"] & \end{tikzcd}$$



Representación de un carcaj:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, bend left, "T_a"] & V_2 \arrow[l, bend left, "T_b"] \arrow[r, "T_c"] & V_3 \arrow[loop right, "T_d"] \\ & V_4 \arrow[u, shift left, "T_f"'] \arrow[u, shift right, "T_e"] & \end{tikzcd}$$

V_i: espacio vectorial

T_x: transformación lineal

(Iso)morfismo de representaciones:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "T_a"] \arrow[d, "\varphi_i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & V_j \arrow[d, "\varphi_j"] \\ W_i \arrow[r, "S_a"'] & W_j \end{tikzcd}$$

φ_i, φ_j: (iso)morfismos lineales

Ejemplos

(1)
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & V_2 \arrow[d, "\psi"] \\ W_1 \arrow[r, "S"'] & W_2 \end{tikzcd}$$
iso

, $\dim V_i < \infty$ $\xrightarrow[\text{bases}]{\text{elegir}}$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & K^m \arrow[d, "\Psi"] \\ K^n \arrow[r, "B"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$B = \Psi A \Phi^{-1}$

Equivalencia de matrices

(2)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[loop right, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] \\ W \arrow[loop right, "S"] \end{tikzcd}$$
iso

, $\dim V < \infty$ $\xrightarrow[\text{bases}]{\text{elegir}}$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[loop right, "A"] \arrow[d, "\Phi"'] \\ K^n \arrow[loop right, "B"] \end{tikzcd}$$

$B = \Phi A \Phi^{-1}$

similitud de matrices

(problema de Jordan)

(3)
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, shift left, "T_a"] \arrow[r, shift right, "T_b"'] \arrow[d, "\varphi"'] & V_2 \arrow[d, "\psi"] \\ W_1 \arrow[r, shift left, "S_a"] \arrow[r, shift right, "S_b"'] & W_2 \end{tikzcd}$$
iso

, $\dim V_i < \infty$ $\overset{\text{elegir}}{\underset{\text{bases}}{\rightsquigarrow}}$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, shift left, "A_1"] \arrow[r, shift right, "A_2"'] \arrow[d, "\Phi"'] & K^m \arrow[d, "\Psi"] \\ K^n \arrow[r, shift left, "B_1"] \arrow[r, shift right, "B_2"'] & K^m \end{tikzcd}$$

$B_1 = \Psi A_1 \Phi^{-1}$

$B_2 = \Psi A_2 \Phi^{-1}$

Problema de Kronecker

Observación También es interesante considerar representaciones de carcajes con relaciones:

$$V \circlearrowleft T,\ T^k = 0, \quad \begin{tikzcd} V \arrow[r, bend left, "T"] & W \arrow[l, bend left, "S"] \end{tikzcd},\ ST = 0, \quad \text{etc.}$$

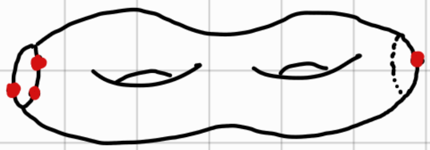
Problema clave "Entender" la categoría de representaciones de un carcaj fijo (posiblemente con relaciones).

Hoy en día nos interesa también la categoría derivada (más adelante)

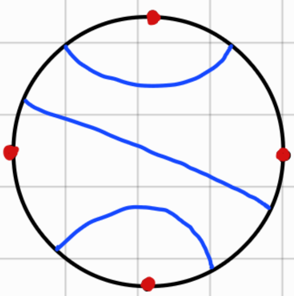
§ Carcajes con relaciones asociados a superficies

Σ : superficie orientada, conexa y $\partial\Sigma \neq \emptyset$

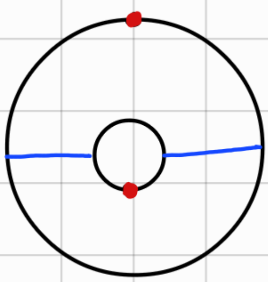
$\Lambda \subset \partial\Sigma$: conjunto finito de puntos marcados



$L_1, L_2, \ldots, L_n \subset \Sigma \setminus \Lambda$ arcos encajados con $\partial L_i \subset \partial\Sigma$ tales que $\Sigma \setminus \bigcup L_i$ es una unión disjunta de discos con exactamente un* punto marcado en su frontera



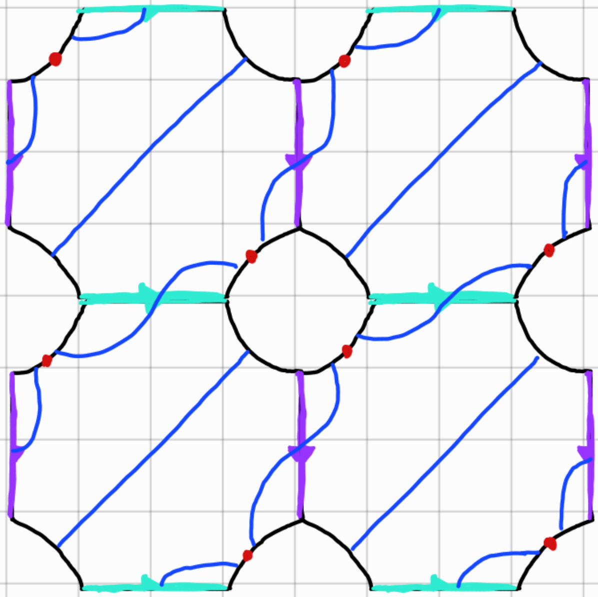
$\Sigma = \mathbb{D}^2$

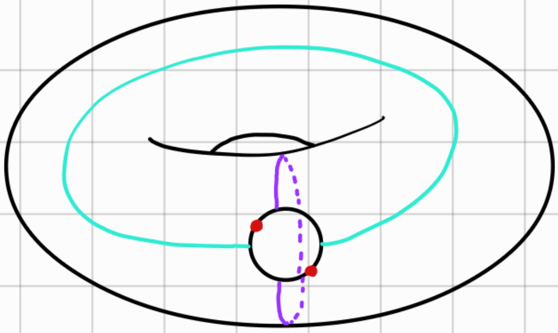


$\Sigma = \mathbb{S}^1 \times [0,1]$

* se puede generalizar al caso en que no hay ningún punto marcado utilizando estructuras A_∞

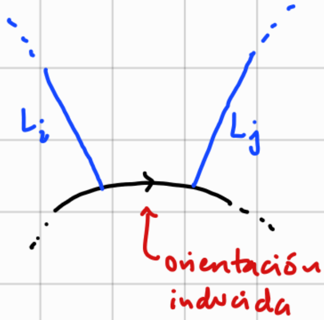
Un ejemplo más complicado ($\Sigma = (S^1 \times S^1) \setminus$ disco abierto):





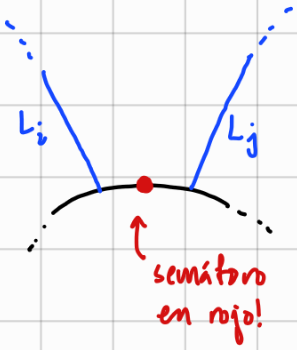
<u>Objetivo</u> Asociar un carcaj a $(\Sigma, \Lambda, L_1, \dots, L_n)$

vértices: $1, \dots, n$ y flechas $i \longrightarrow j$ cuando

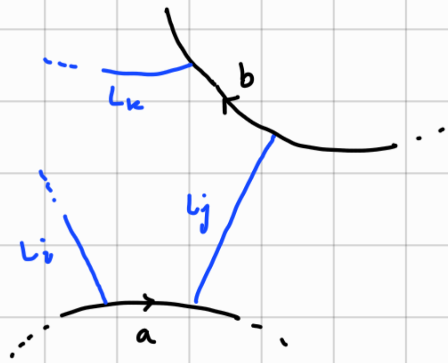


OjO: $i \cancel{\longrightarrow} j$ si

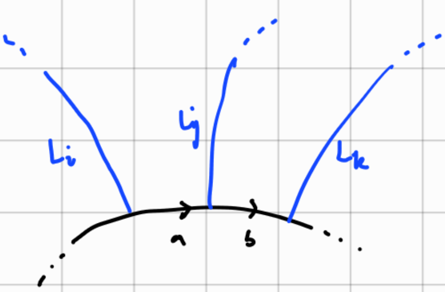
no hay flecha!



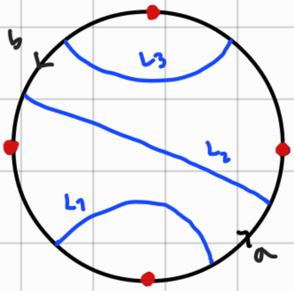
relaciones: $i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k$ cuando



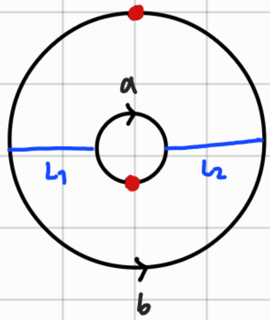
OjO: no hay relación $i \xrightarrow{a} j \xrightarrow{b} k$ si



Ejemplos

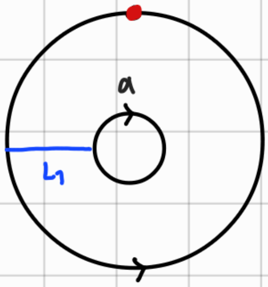


$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & 3 \arrow[dl, "b"'] \\ & 2 & \\ 1 \arrow[ur, "a"] & & \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "b"'] & 2 \end{tikzcd}$$

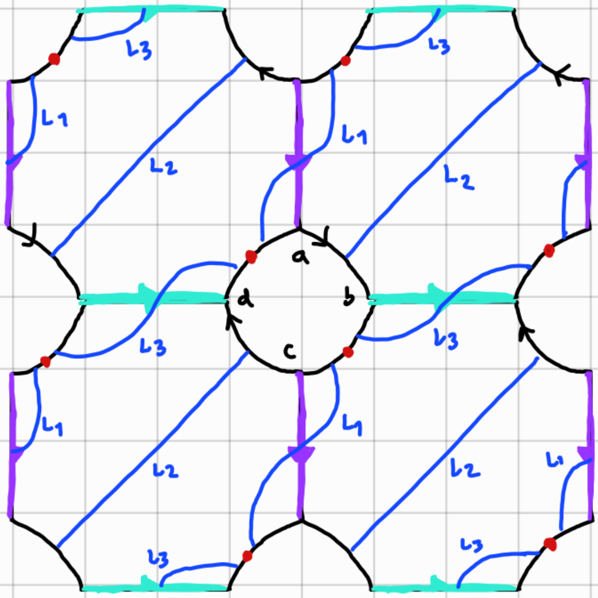
problema de Kronecker



$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "a"] \end{tikzcd}$$

ojo: no hay relaciones

problema de Jordan



$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, shift left, "b"] \arrow[dr, shift right, "d"'] & \\ 1 \arrow[ur, shift left, "a"] \arrow[ur, shift right, "c"'] & & 3 \end{tikzcd}$$

$d \cdot a = 0$

$b \cdot c = 0$

Observación Resulta indispensable considerar carcajes graduados, es decir cada flecha $i \xrightarrow{a} j$ tiene un grado $|a| \in \mathbb{Z}$ (que podemos elegir libremente, pero una vez elegido está fijo)

Teorema

campo de líneas tangentes

graduación

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large] (\Sigma, \Lambda, L_1, \dots, L_n, \eta) \arrow[r, squiggly, shift left, "\substack{\text{Auroux 2010} \\ \text{Haiden-Katzarkov-Kontsevich 2017}}"] \arrow[d, squiggly, "\text{A- HKK}"'] & (Q(\Sigma,\Lambda), |\cdot|_\eta) \arrow[l, squiggly, shift left, "\text{Lekili-Polishchuk 2019}"] \arrow[d, squiggly] \\ \mathcal{W}(\Sigma, \Lambda, \eta) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq", "\substack{\text{A-HKK} \\ \text{LP}}"'] & D^c(Q(\Sigma,\Lambda), |\cdot|_\eta) \end{tikzcd}$$

categoría de Fukaya (parcialmente enrollada)

complicada (geometría simpléctica)

categoría derivada (compacta)

"menos" complicada (álgebra lineal y homológica)

§ Conjetura "optimista" de Lekili y Polischuk (2019)

$$\mathcal{W}(\Sigma,\Lambda,\eta) \simeq \mathcal{W}(\Sigma',\Lambda',\eta') \overset{?}{\Longrightarrow} \exists\ \Phi : \Sigma \to \Sigma' \text{ homeomorfismo}$$

$$\Longleftarrow \quad \Phi : \Lambda \xrightarrow{1:1} \Lambda' \quad y \quad \eta' \simeq \Phi_*(\eta)$$

$\Updownarrow$ teorema anterior (casi "por construcción" pero no es trivial) $\Updownarrow$ demostrado en LP 2019

HKK

$$D^c(Q(\Sigma,\Lambda), H_\eta) \simeq D^c(Q(\Sigma',\Lambda'), H_{\eta'}) \overset{?}{\Longrightarrow} \eta \ \& \ \eta' \text{ tienen los mismos "invariantes numéricos" introducidos por LP.}$$

Problema "Leer" los invariantes númericos de LP desde $D^c(Q(\Sigma,\Lambda), H_\eta)$

$g=0$
- $\#$ componentes conexas $\partial_i\Sigma$ de $\partial\Sigma$ y $\#(\Lambda \cap \partial_i\Sigma)$
- winding numbers de las $\partial_i\Sigma$ (dependen de η)

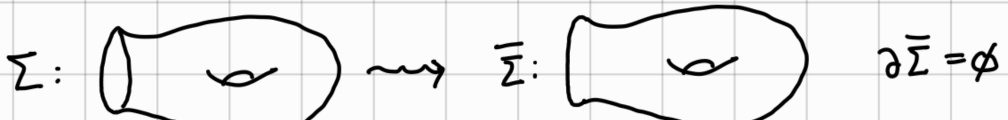
$\vdots$

- invariante de Arf de cierta forma cuadrática (en algunos casos)

$$H_1(\overline{\Sigma}, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{2g} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$g \geq 2$

(para $g=1$ es otro)



Dicho de otra forma, ¿qué significa η en términos de $D^c(Q(\Sigma,\Lambda), H_\eta)$?

Por ahora se sabe lo siguiente:

prueban algo más general

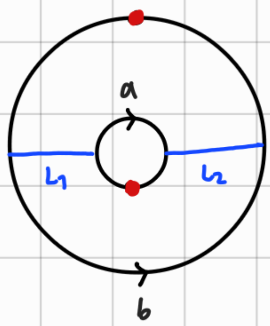
todas las flechas en grado 0

Teorema (Amiot - Plamondon - Schroll, Opper 2019 arxiv)

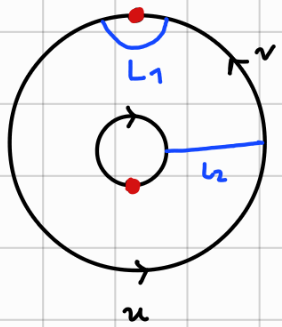
La conjetura es válida cuando $H_\eta \equiv 0$ y $H_{\eta'} \equiv 0$

y al menos un punto en cada componente conexa de $\partial\Sigma$

lo podríamos pedir desde el inicio, pero la conjetura es más general.



$\simeq$

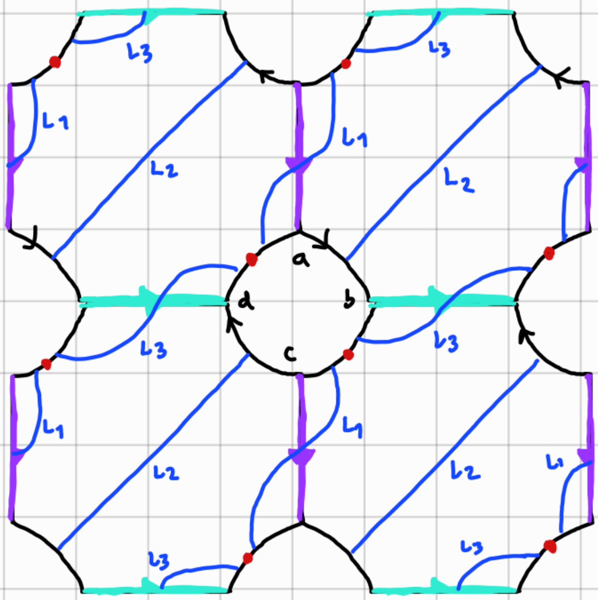


$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \end{tikzcd}$$

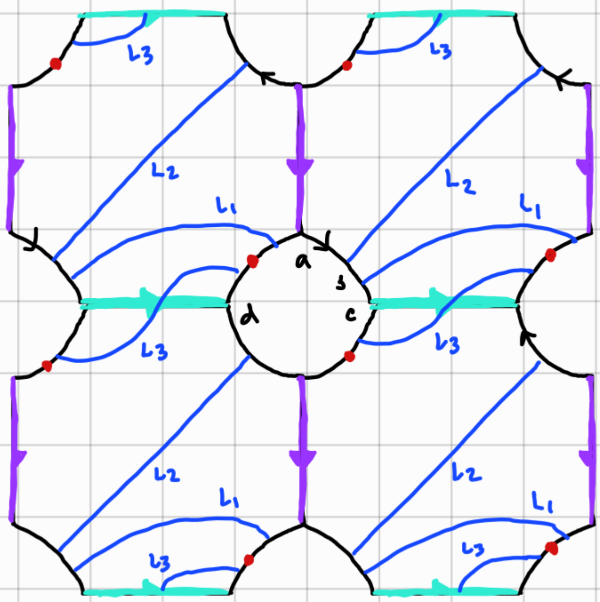
$|a| = |b| = 0$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "u"] & 2 \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$$

$|v| = 0 \quad |u| = 1$



$\simeq$



$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, shift left, "b"] \arrow[dr, shift right, "d"'] & \\ 1 \arrow[ur, shift left, "a"] \arrow[ur, shift right, "c"'] & & 3 \end{tikzcd}$$

$d \cdot a = 0$

$b \cdot c = 0$

$|a| = |b| = |c| = |d| = 0$

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, shift left, "b"] \arrow[dr, "d"] & \\ 1 \arrow[ur, shift left, "a"] \arrow[rr, "c"] & & 3 \end{tikzcd}$$

$a \cdot b = 0$

$d \cdot a = 0$

$|b| = |c| = |d| = 0$

$|a| = 1$

§ Productos symmétricos

$$d \geq 1 \rightsquigarrow \operatorname{Sym}^d(\Sigma) := \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{d} / \mathfrak{S}_d \quad \underline{\text{producto simétrico}}$$

$$n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k \,, \quad p_i \in \Sigma \,, \quad n_i \geq 1 \quad \& \quad n_1 + \cdots + n_k = d$$

$$\Lambda^{(d)} := \bigcup_{p \in \Lambda} \{p\} + \operatorname{Sym}^{d-1}(\Sigma)$$

Auroux 2010: $\mathcal{W}(\operatorname{Sym}^d \Sigma, \Lambda^{(d)})$ categoría de Fukaya (parcialmente envollada)

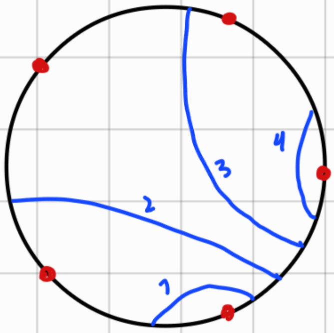
En colaboración con Dyckerhoff y Lekili estudiamos el caso $\Sigma = \mathbb{D}^2$.

$n+1$ puntos en $\partial \mathbb{D}^2$

En este caso relacionamos $\mathcal{W}(\operatorname{Sym}^d \mathbb{D}^2, \Lambda_n^{(d)})$ con la categoría derivada de ciertas álgebras de interés en teoría de representaciones.

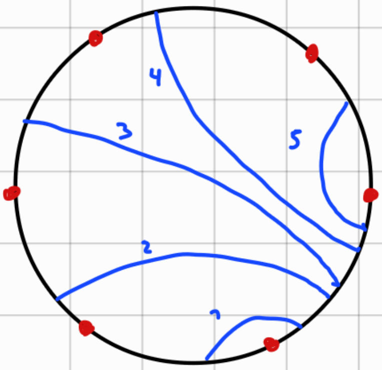
no trivial!

Ejemplo



$\rightsquigarrow$ $d=2$

$$\begin{tikzcd}
12 \arrow[r] & 13 \arrow[r] \arrow[d] & 14 \arrow[d] \\
& 23 \arrow[r] & 24 \arrow[d] \\
& & 34
\end{tikzcd}$$



$\rightsquigarrow$ $d=3$